# La ecuación cúbica

Eduardo Virueña Silva

12 de junio de 2023

## 1. La fórmula

Considérese la ecuación:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

con $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Para resolver (1), primero se divide la ecuación entre $a$.

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Se podría eliminar el término de segundo grado, para ello se hace un cambio de variable $x = z + t$

$$(z+t)^3 + \frac{b}{a}(z+t)^2 + \frac{c}{a}(z+t) + \frac{d}{a} = 0$$

la expansión de binomios da:

$$\left(z^3 + 3z^2t + 3zt^2 + t^3\right) + \frac{b}{a}\left(z^2 + 2zt + t^2\right) z + \frac{c}{a}\left(z+t\right) z + \frac{d}{a} = 0$$

agrupando los términos semenjantes de $z$:

$$z^3 + \left(3t + \frac{b}{a}\right) z^2 + \left(3t^2 + 2\frac{b}{a}t + \frac{c}{a}\right) z + \left(t^3 + \frac{b}{a}t^2 + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a}\right) = 0$$

para eliminar el término de segundo grado, tomamos: $t = -\frac{b}{(3a)}$

$$\begin{aligned} z^3 + \left(3\left(-\frac{b}{3a}\right) + \frac{b}{a}\right) z^2 + \left(3\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{3a}\right) + \frac{c}{a}\right) z \\ + \left(\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$z^3 + \left(-\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\right) z^2 + \left(\frac{3b^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) z - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$z^3 + \left(\frac{3b^2}{9a^2} - \frac{6b^2}{9a^2} + \frac{9ac}{9a^2}\right) z - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{3b^3}{27a^3} - \frac{9abc}{27a^3} + \frac{27a^2d}{27a^3} = 0$$

$$z^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2} z + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = 0$$

Ahora la ecuación puede escribirse:

$$z^3 + pz + q = 0$$

con

$$\begin{aligned} p &= \frac{3ac - b^2}{3a^2} \\ q &= \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \end{aligned}$$

Se considera ahora un binomio al cubo:

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

que puede agruparse así:

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 +$$

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$$

que puede compararse con la ecuación:

$$z^3 + pz + q = 0$$

con

$$\begin{aligned} z &= u + v \\ p &= -3uv \\ q &= -\left(u^3 + v^3\right) = -u^3 - v^3 \end{aligned}$$

puede despejarse a $v$ y sustituirse en $q$:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{p}{3u} \\ q &= -u^3 - \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 \\ u^3 q &= -u^6 - \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

reacomodando:

$$(u^3)^2 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

que puede resolverse como una cuadrática:

$$\begin{aligned} u^3 &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} \\ &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \end{aligned}$$

Debe observarse que esta misma expresión puede deducirse para $v^3$. De manera que las raíces pueden asignarse arbitrariamente así:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

pero debe recordarse que:

$$uv = -\frac{p}{3}$$

Por lo tanto, $z$ puede escribirse en la forma:

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Debe hacerse un cuidadoso análisis de:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

pues, si esta cantidad es negativa, el proceso involucrará números complejos.

Las otras dos raíces se obtienen considerando la raíz cúbica de la unidad:

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y considerando:

$$\begin{aligned} u_2 &= u\omega \\ v_2 &= v\omega^2 \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} u_2v_2 &= uv\omega^3 \\ &= -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

entonces la segunda raíz es:

$$z_2 = u_2 + v_2$$

análogamente

$$\begin{aligned} u_3 &= u\omega^2 \\ v_3 &= v\omega \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} u_3v_3 &= uv\omega^3 \\ &= -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

entonces la tercera raíz es:

$$\begin{aligned} z_2 &= u_2 + v_2 \\ z_3 &= u_3 + v_3 \end{aligned}$$

Por último, la soluciones de la ecuación cúbica serán:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + \frac{b}{3a} \\ x_2 &= z_2 + \frac{b}{3a} \\ x_3 &= z_3 + \frac{b}{3a} \end{aligned}$$

# 2. Ejemplo

## 2.1. $x^3 - 16x^2 + 79x - 120 = 0$

En esta ecuación:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -16 \\ c &= 79 \\ d &= -120 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{3ac-b^2}{3a^2} \\
&= \frac{3(1)(79)-(-16)^2}{3*(1)^2} \\
&= \frac{237-256}{3} \\
&= -\frac{19}{3} \\
q &= \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3} \\
&= \frac{2(-16)^3-9(1)(-16)(79)+27(1)^2(-120)}{27(1)^3} \\
&= \frac{-8192+11376-3240}{27} \\
&= -\frac{56}{27} \\
D &= \left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\
D &= \left(\frac{-\frac{56}{27}}{2}\right)^2+\left(\frac{-\frac{19}{3}}{3}\right)^3 = \left(-\frac{28}{27}\right)^2+\left(-\frac{19}{9}\right)^3 \\
&= \frac{784}{729}-\frac{6859}{729}=\frac{6075}{729} \\
&= -\frac{25}{3} \\
u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{-\frac{56}{27}}{2}+\sqrt{-\frac{25}{3}}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{28}{27}+i\sqrt{\frac{25}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}+\frac{i}{\sqrt{3}} \\
v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{-\frac{56}{27}}{2}-\sqrt{-\frac{25}{3}}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{28}{27}-i\sqrt{\frac{25}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}-\frac{i}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

ahora, notemos que:

$$\begin{aligned}
uv &= \left(\frac{4}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= \frac{16}{9} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{19}{9} \\
-\frac{p}{3} &= -\left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{19}{3} \\
&= uv
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
z_1 &= u + v = \left(\frac{4}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \\
&= 2\left(\frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

por último:

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1 - \frac{b}{3a} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{-16}{3(1)} \\
&= \frac{8}{3} + \frac{16}{3(1)} \\
&= \frac{24}{3} \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Las otras dos raíces pueden obtenerse así:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \omega u + \omega^2 v \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{4}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\frac{7}{3} \\
x_2 &= z_2 - \frac{b}{3a} \\
&= -\frac{7}{3} - \frac{-16}{3(1)} \\
&= -\frac{7}{3} + \frac{16}{3} \\
&= \frac{9}{3} \\
&= 3 \\
z_3 &= \omega^2 u + \omega v \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{4}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{1}{3} \\
x_3 = &= z_3 - \frac{b}{3a} \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{-16}{3(1)} \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{16}{3} \\
&= \frac{15}{3} \\
&= 5
\end{aligned}$$