Trigonometría sin dibujitos

Eduardo Virueña Silva

3 de abril de 2013

Definición 1. *Dados dos números enteros no negativos a, b, $a \geq b$, se define el* coeficiente del binomio *de a y b, así:*

$$\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) := \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

Definición 2 (Serie)**.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Definimos la* serie $\{\{a_n\}\}$ *así:*

$$\{\{a_n\}\} := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \right\}$$

es decir, la serie $\{\{a_n\}\}$ es la sucesión de sumas parciales *de la sucesión $\{a_n\}$.*

Definición 3 (Suma de una serie)**.** *Si el límite de la serie $\{\{a_n\}\}$ existe, entonces a dicho número le llamaremos la* suma *de la serie $\{\{a_n\}\}$ y escribiremos:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1}$$

Definición 4 (Producto de dos series)**.** *El* producto *de dos series de números reales: $\{\{a_n\}\}$ y $\{\{b_n\}\}$ se define así:*

$$\{\{a_n\}\} \cdot \{\{b_n\}\} := \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right\} \right\} \tag{2}$$

Definición 5 (Función seno)**.** *La función* seno *es la función:*

$$\begin{aligned} \mathrm{sen} : \mathbb{R} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ \alpha \quad &\to \quad \mathrm{sen}(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned} \tag{3}$$

es decir, la función seno, evaluada en un punto α, es la suma de la serie:

$$\left\{ \left\{ \frac{(-1)^k \alpha^{2k+1}}{2k+1} \right\} \right\}$$

Observación 1. $\operatorname{sen}(0) = 0$.

Observación 2. *La función seno es una función impar.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-\alpha)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^{2k+1}\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= -\operatorname{sen}(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Definición 6 (Función coseno)**.** *La función* coseno *es la función:*

$$\begin{aligned}
\cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
\alpha &\to \cos(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned} \tag{4}$$

es decir, la función coseno, evaluada en un punto α, es la suma de la serie:

$$\left\{\left\{ \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{2k} \right\}\right\}$$

Observación 3. $\cos(0) = 1$.

Observación 4. *La función coseno es una función par.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\cos(-\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-\alpha)^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^{2k}\alpha^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!} \\
&= \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Proposición 1. *Para cualesquiera que sean α y $\beta \in \mathbb{R}$:*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \tag{5}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\beta^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}\beta^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}\beta^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}\beta^{2n+1-2k-1}}{(2n+1-2k-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{((2n+1)-(2k+1))! \cdot (2k+1)!} \cdot \alpha^{2k+1} \cdot \beta^{2n+1-(2k+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2k+1 \end{pmatrix} \alpha^{2k+1} \cdot \beta^{2n+1-(2k+1)} \\
\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\beta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}\beta^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k} \beta^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2k)! \cdot (2k)!} \alpha^{2k} \beta^{2n+1-2k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \alpha^{2k} \beta^{2n+1-2k}.
\end{aligned}
$$

Ahora, sumando las expresiones de $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)$ y de $\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \alpha^{2k+1} \beta^{(2n+1)-(2k+1)} \\
&\qquad\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \alpha^{2k} \beta^{(2n+1)-2k} \\
&\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \alpha^{2k+1} \beta^{(2n+1)-(2k+1)} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \alpha^{2k} \beta^{(2n+1)-2k} \right).
\end{aligned}
$$

Debemos hacer notar que las sumas en el paréntesis son los términos impares y pares de una misma suma:

$$
\sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{r} \alpha^r \beta^{(2n+1)-r}
$$

que, por el teorema del binomio de Newton, es igual a $(\alpha+\beta)^{2n+1}$. De manera que tenemos entonces:

$$
\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\alpha+\beta)^{2n+1} = \operatorname{sen}(\alpha+\beta),
$$

$\square$

Corolario 1. *Si sustituimos β por $-\beta$ en la identidad del seno de la suma (ec. 5) obtenemos:*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta) \\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}
$$

de donde:

$$
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \tag{6}
$$

Corolario 2. *Para cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \tag{7}$$

Demostración. En la proposición anterior (ec. 5) tomemos $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\\ &= 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha).\end{aligned}$$

Proposición 2. *Para cualesquiera que sean α y $\beta \in \mathbb{R}$:*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \tag{8}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta^{2k}}{(2k)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}\beta^{2(n-k)}}{(2(n-k))!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}\beta^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2k)!\cdot(2n-2k)!}\cdot\alpha^{2k}\cdot\beta^{2n-2k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\alpha^{2k}\cdot\beta^{2n-2k}\\ \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}\beta^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}\beta^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}\beta^{2n+2-2k-1}}{(2n+2-2k-1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}\beta^{(2n+2)-(2k+1)}}{((2n+2)-(2k+1))!}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+2)!}{(2n+2-(2k+1))! \cdot (2k+1)!} \cdot \alpha^{2k+1} \beta^{2n+2-(2k+1)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1} \alpha^{2k+1} \beta^{2n+2-(2k+1)}$$

En esta suma podemos hacer un cambio de índice: $r := n+1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r)!} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2r}{2k+1} \alpha^{2k+1} \beta^{2r-(2k+1)} \\ &= -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{(2r)!} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2r}{2k+1} \alpha^{2k+1} \beta^{2r-(2k+1)} \end{aligned}$$

Esta suma puede empezarse en $r = 0$ porque la suma interior no aporta sumandos pues tiene un índice inicial mayor que el final.

$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{(2r)!} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2r}{2k+1} \alpha^{2k+1} \beta^{2r-(2k+1)}$$

Ahora, hagamos la resta de $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \alpha^{2k} \beta^{2n-2k} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \alpha^{2k+1} \beta^{2n-(2k+1)}. \end{aligned}$$

Debemos hacer notar que las sumas en el paréntesis son los términos impares y pares de una misma suma:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{2n}{r} \alpha^r \beta^{2n-r}$$

que, por el teorema del binomio de Newton, es igual a $(\alpha+\beta)^{2n}$. De manera que tenemos entonces:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\alpha+\beta)^{2n} = \cos(\alpha+\beta),$$

$\square$

Corolario 3. *Para cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 \tag{9}$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. En la proposición anterior (ec. 8) podemos tomar $\beta = -\alpha$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \alpha) &= \cos(\alpha)\cos(-\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \cos(0) &= \cos(\alpha)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \text{// coseno par, seno impar} \\ 1 &= \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha). \end{aligned}$$

□

Corolario 4. *Si sustituimos β por $-\beta$ en la identidad del coseno de la suma (ec. 8), obtenemos:*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$

de donde:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \tag{10}$$

Corolario 5. *Para cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$$

Demostración. En la proposición anterior (ec. 8) tomemos $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \alpha) &= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha). \end{aligned}$$

□

Proposición 3. *Para cualesquiera que sean α y $\beta \in \mathbb{R}$:*

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) \tag{11}$$

$$\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) \tag{12}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \tag{13}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = -\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) \tag{14}$$

Demostración. Recordemos las las ec. (5) y (6):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\end{aligned}$$

sumándolas obtenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta))\end{aligned}$$

restándolas obtenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)).\end{aligned}$$

Recordemos las ec. (8) y (10):

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\end{aligned}$$

Sumándolas obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\end{aligned}$$

restándolas obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\ \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) &= -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))\end{aligned}$$

□

Corolario 6. *En las ecuaciones de la proposición anterior podemos hacer las sustituciones:*

$$A=\alpha+\beta, \quad B=\alpha-\beta$$

y de ellas obtener:

$$\alpha=\frac{A+B}{2}, \quad \beta=\frac{A-B}{2}$$

entonces, las identidades ahora son:

$$\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{15}$$

$$\operatorname{sen}(A) - \operatorname{sen}(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{16}$$

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{17}$$

$$\cos(A) - \cos(B) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \tag{18}$$

Definición 7. *La función* tangente *se define así:*

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} - \left\{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ \alpha \quad &\to \quad \tan(\alpha) := \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{aligned} \tag{19}$$

Observación 5. *La función tangente es impar.*

Demostración. Como la función seno es impar y la función coseno es par, tenemos:

$$\begin{aligned} tan(-\alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ &= -\tan(\alpha) \end{aligned}$$

Proposición 4. *Supongamos que* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *que tanto* $\tan(\alpha)$ *como* $\tan(\beta)$ *están definidas y que* $\tan(\alpha)\tan(\beta) \neq 1$, *entonces:*

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{20}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)} \\
&= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\frac{\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\
&= \frac{\tan(\alpha)\cdot 1+1\cdot\tan(\beta)}{1\cdot 1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \\
&= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}
\end{aligned}$$

□

Corolario 7. *Si en la proposición anterior (ec. 20), sustituimos β por $-\beta$, obtenemos:*

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(-\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(-\beta)}$$

Pero como la función tangente es impar:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Corolario 8. *Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, si $\tan(\alpha)$ está definida, y si $\tan^2(\alpha)\neq 1$, entonces:*

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \tag{21}$$

Demostración. En la proposición anterior (ec. 20), tomemos $\alpha=\beta$.

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\alpha) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)\tan(\alpha)} \\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}
\end{aligned}$$

□

Continuará...