Método de Feynman de integración

Eduardo Virueña Silva

23 de agosto de 2023

Calcular:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Puede probarse fácilmente que:

$$\int e^{ax} \sin(x) dx = \frac{1}{1+a^2} e^{ax} \left(a \sin(x) - cos(x)\right) + C \tag{1}$$

Sabemos que no existe una primitiva para la función:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

por lo que la integración va a requerir una técnica especial.
Consideremos entonces la función:

$$g : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$g(u) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xu} \sin(x)}{x} dx$$

Observemos que:

$$g(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

que es la integral que queremos calcular.

Podemos derivar g y obtener:

$$\begin{aligned}
g'(u) &= \frac{d}{du}\int_0^\infty e^{-xu}\frac{\sin(x)}{x}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{du}e^{-xu}\frac{\sin(x)}{x}dx \\
&= \int_0^\infty -xe^{-xu}\frac{\sin(x)}{x}dx \\
&= -\int_0^\infty e^{-xu}\sin(x)dx
\end{aligned}$$

Empleando la fórmula (1), podemos evaluar esta integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-xu}\sin(x)dx &= \left[\frac{1}{1+(-u)^2}e^{(-u)x}\left((-u)\sin(x) - cos(x)\right)\right]_0^\infty \\
&= \left[\frac{1}{1+u^2}e^{-ux}\left(-u\sin(x) - cos(x)\right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{1+u^2}\left[e^{-ux}\left(-u\sin(x) - cos(x)\right)\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{1+u^2}\left[\lim_{x\to\infty}\left[e^{-ux}\left(-u\sin(x) - cos(x)\right)\right]\right. \\
&\quad \left. - \left[e^{-u0}\left(-u\sin(0) - cos(0)\right)\right]\right. \\
&= \frac{1}{1+u^2}\left(0 - (-1)\right) \\
&= \frac{1}{1+u^2}
\end{aligned}$$

Con lo que ahora se tiene:

$$g'(u) = -\frac{1}{1+u^2}$$

Ahora se procede a integrar:

$$\begin{aligned}
g(u) &= -\int \frac{1}{u^2+1}du \\
&= -\arctan u + C
\end{aligned}$$

Lamentablemente, no se conoce el valor de dicha constante, pero puede observarse que:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} g(u) &= \lim_{u\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-xu}\sin(x)}{x} dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

De manera que:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} g(u) =& -\arctan(u) + C \\ 0 =& -\frac{\pi}{2} + C \\ C =& \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$g(u) = -\arctan(u) + \frac{\pi}{2}$$

Por último,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx =& g(0) \\ =& -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} \\ =& \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$