Solución de Lagrange de ecuaciones cúbicas

Eduardo Virueña Silva

Empecemos con la ecuación cúbica:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

que puede resolverse resolviendo la ecuación *resolvente de Lagrange*:

$$z^2 + (2a^3 - 9ab + 27c)z + (a^2 - 3b)^3 = 0$$

Al encontrar sus raíces z_1, y z_2, se obtiene una solución para la ecuación cúbica mediante la relación:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}$$

las otras dos raíces son:

$$x_2 = \frac{-a + \omega\sqrt[3]{z_1} + \omega^2\sqrt[3]{z_2}}{3}$$
$$x_3 = \frac{-a + \omega^2\sqrt[3]{z_1} + \omega\sqrt[3]{z_2}}{3}$$

donde:

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

En efecto, empecemos con una ecuación de tercer grado, y procedamos a resolverla como lo hizo Cardano:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Consideremos un cambio de variable $x = y + h$, y busquemos un valor para h de manera que podamos eliminar el término cuadrático:

$$\begin{gathered}
(y+h)^3 + a(y+h)^2 + b(y+h) + c = 0 \\
(y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3) + a(y^2 + 2yh + h^2)^2 + b(y+h) + c = 0 \\
y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + ay^2 + 2ayh + ah^2 + by + bh + c = 0 \\
y^3 + 3hy^2 + ay^2 + 3h^2y + 2ahy + by + h^3 + ah^2 + bh + c = 0 \\
y^3 + (3h+a)y^2 + (3h^2 + 2ah + b)y + h^3 + ah^2 + bh + c = 0
\end{gathered}$$

Tomemos $h = -\frac{a}{3}$, para eliminar el término de segundo grado.

$$\begin{aligned}
y^3 + \left(3\left(-\frac{a}{3}\right) + a\right)y^2 + \left(3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\left(-\frac{a}{3}\right) + b\right)y & \\
+ \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = 0 & \\
y^3 + (-a+a)\,y^2 + \left(3\left(\frac{a^2}{9}\right) - \frac{2a^2}{3} + b\right)y - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0 &
\end{aligned}$$

Busquemos denominadores adecuados para las sumas:

$$\begin{aligned}
y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + \frac{3b}{3}\right)y - \frac{a^3}{27} + \frac{3a^3}{27} - \frac{9ab}{27} + \frac{27c}{27} = 0 \\
y^3 + \left(\frac{3b - a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} = 0
\end{aligned}$$

Tomemos:

$$\begin{aligned}
p &= 3b - a^2 \\
q &= 2a^3 - 9ab + 27c
\end{aligned}$$

para tener:

$$y^3 + \frac{p}{3}y + \frac{q}{27} = 0$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\
(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) &= 0
\end{aligned}$$

lo que puede identificarse con la ecuación anterior si:

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ \frac{p}{3} &= -3uv \\ \frac{q}{27} &= -u^3 - v^3 \end{aligned}$$

Despejemos v:

$$v = -\frac{p}{9u}$$

y luego sustituyamos:

$$\begin{aligned} \frac{q}{27} &= -u^3 - \left(-\frac{p}{9u}\right)^3 \\ u^3 + \left(-\frac{p}{9u}\right)^3 + \frac{q}{27} &= 0 \\ u^6 + \frac{q}{27}u^3 - \left(\frac{p}{9}\right)^3 &= 0 \\ u^6 + \frac{q}{27}u^3 - \frac{p^3}{9^3} &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que: $9^3 = (3^2)^3 = 3^6$

$$u^6 + \frac{q}{3^3}u^3 - \frac{p^3}{3^6} = 0$$

Multipliquemos por 3^6

$$\begin{aligned} 3^6u^6 + 3^3qu^3 - p^3 &= 0 \\ (3u)^6 + q(3u)^3 - p^3 &= 0 \\ \left((3u)^3\right)^2 + q(3u)^3 - p^3 &= 0 \end{aligned}$$

De la que podemos obtener $(3u)^3$:

$$\begin{aligned} (3u)^3 &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4(1)(-p^3)}}{2(1)} \\ &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2} \end{aligned}$$

De manera similar, despejando v y haciendo la sustitución, también llegamos a que:

$$(3v)^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}$$

Entonces, podemos tomar:

$$(3u)^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}$$
$$(3v)^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}$$

Las expresiones de la derecha son las raíces de la ecuación:

$$z^2 + qz + p^3 = 0$$

así que tenemos:

$$u = \frac{1}{3}\sqrt[3]{z_1}$$
$$v = \frac{1}{3}\sqrt[3]{z_2}$$

Debemos recordar que realmente hay tres raíces cúbicas complejas de un número complejo t:

$$r_0 = \sqrt[3]{t}, \quad r_1 = \omega\sqrt[3]{t} \quad r_2 = \omega^2\sqrt[3]{t}$$

Donde:

$$\sqrt[3]{t} = |t|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\arg(t)}{3}i}$$
$$\omega = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

ω es la raíz cúbica primitiva de la unidad.

Entonces, las raíces de u y de v deberían escogerse con cuidado, de manera que $\frac{p}{3} = -3uv$. Esto puede lograrse escogiendo:

$$\frac{p}{3} = -3uv$$
$$\frac{p}{3} = -3(u\omega)(v\omega^2) = 3uv\omega^3 = -3uv$$
$$\frac{p}{3} = -3(u\omega^2)(v\omega) = 3uv\omega^3 = -3uv$$

De manera que $y^3 + 3py + q = 0$, tiene las soluciones:

$$y_1 = u + v$$
$$y_2 = \omega u + \omega^2 v$$
$$y_3 = \omega^2 u + \omega v$$

La ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}$$
$$x_2 = \frac{-a + \omega\sqrt[3]{z_1} + \omega^2\sqrt[3]{z_2}}{3}$$
$$x_3 = \frac{-a + \omega^2\sqrt[3]{z_1} + \omega\sqrt[3]{z_2}}{3}$$

Donde z_1 y z_2 son las raíces de la ecuación:

$$z^2 + qz + p^3 = 0$$

que es la ecuación:

$$z^2 + (2a^3 - 9ab + 27c)z + (3b - a^2)^3 = 0$$