

Resolver la ecuación: $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$

Eduardo Virueña Silva

10 de enero de 2024

Cosideraremos la ecuación:

$$\begin{aligned}x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 &= 0 \\x^4 - x^3 &= 4x^2 - 4x - 1\end{aligned}$$

Completamos el cuadrado del lado izquierdo:

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^2 \left(\frac{x}{2}\right) &= 4x^2 - 4x - 1 \\x^4 - 2x^2 \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 4x^2 - 4x - 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 &= \left(4 - \frac{1}{2}\right)x^2 - 4x - 1 \\ \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 &= \frac{17}{4}x^2 - 4x - 1\end{aligned}$$

Introduciremos una variable y , cuyo valor se calculará para que para que el lado derecho pueda ser un cuadrado:

$$\begin{aligned}\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)y + y^2 &= \frac{17}{4}x^2 - 4x - 1 + 2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)y + y^2 \\ \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)y + y^2 &= \left(\frac{17}{4} + 2y\right)x^2 - (y + 4)x + (y^2 - 1) \\ \left(x^2 - \frac{x}{2} + y\right)^2 &= \left(\frac{17}{4} + 2y\right)x^2 - (y + 4)x + (y^2 - 1)\end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación tiene la forma $Ax^2 + Bx + c$, que requiere la condición $B^2 - 4AC = 0$ para que sea trinomio cuadrado.

$$B^2 - 4AC = (-(y + 4))^2 - 4\left(\frac{17}{4} + 2y\right)^2 (y^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
y^2 + 8y + 16 - (17 + 8y)(y^2 - 1) &= 0 \\
y^2 + 8y + 16 + (17 + 8y)(1 - y^2) &= 0 \\
y^2 + 8y + 16 + 17 - 17y^2 + 8y - 8y^3 &= 0 \\
8y^3 + 16y^2 - 16y - 33 &= 0
\end{aligned}$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $y = -\frac{3}{2}$, que podemos sustituir en la ecuación:

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{17}{4} + 2y\right)x^2 - (y + 4)x + y^2 - 1$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{17}{4} + 2\left(-\frac{3}{2}\right)\right)x^2 - \left(-\frac{3}{2} + 4\right)x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1 \\
&= \left(\frac{17}{4} - 3\right)x^2 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{8}{2}\right)x + \frac{9}{4} - \frac{4}{4} \\
&= \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4} \\
&= \frac{5}{4}(x^2 - 2x + 1)
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4}(x - 1)^2 \\
x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} &= \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1)
\end{aligned}$$

tenemos entonces que resolver dos ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned}
x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} &= \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \\
x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} &= -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1)
\end{aligned}$$

simplificándolas obtenemos:

$$\begin{aligned}
x^2 - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}x + \frac{\sqrt{5} - 3}{2} &= 0 \\
x^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x - \frac{\sqrt{5} + 3}{2} &= 0
\end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}} \right)$$

$$x_3 = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} \right)$$

$$x_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{5} - \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} \right)$$