

Problema 9-4

Theory of Equations

Uspensky

Eduardo Virueña Silva

Noviembre, 2025

Problema 1. *Probar que si z_0, z_1, z_2 son tres números complejos distintos, entonces la igualdad:*

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2$$

se cumple si y sólo si, existe un número real λ tal que:

$$z_2 - z_0 = i\lambda(z_1 - z_0)$$

Observación

Notemos que $z_1 - z_0 \neq 0$, porque los tres puntos son distintos.

Demostración.

Necesidad

Supongamos primero que:

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2$$

Podemos suponer que:

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = x_2 + iy_2, \quad x_2, y_2 \in \mathbb{R}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
 |z_2 - z_1|^2 &= |(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)| \\
 &= |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)| \\
 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
 &= x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2
 \end{aligned}$$

De igual manera:

$$\begin{aligned}
 |z_1 - z_0|^2 &= x_1^2 - 2x_0x_1 + x_0^2 + y_1^2 - 2y_0y_1 + y_0^2 \\
 |z_2 - z_0|^2 &= x_2^2 - 2x_0x_2 + x_0^2 + y_2^2 - 2y_0y_2 + y_0^2
 \end{aligned}$$

Ahora, la igualdad:

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2$$

equivale a:

$$\begin{aligned}
 x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 &= \\
 x_1^2 - 2x_0x_1 + x_0^2 + y_1^2 - 2y_0y_1 + y_0^2 &+ x_2^2 - 2x_0x_2 + x_0^2 + y_2^2 - 2y_0y_2 + y_0^2
 \end{aligned}$$

Simplifiquemos algunos términos y agrupemos términos semejantes

$$\begin{aligned}
 \cancel{x_2^2} - 2x_1x_2 + \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} - 2y_1y_2 + \cancel{y_2^2} &= \\
 \cancel{x_1^2} - 2x_0x_1 + 2x_0^2 + \cancel{y_1^2} - 2y_0y_1 + \cancel{y_0^2} &- \cancel{x_2^2} - 2x_0x_2 + \cancel{y_2^2} - 2y_0y_2 + 2y_0^2
 \end{aligned}$$

al dividir entre 2, tenemos:

$$-x_1x_2 - y_1y_2 = -x_0x_1 + x_0^2 - y_0y_1 - x_0x_2 - y_0y_2 + y_0^2$$

Reacomodemos:

$$x_0x_2 - x_1x_2 + y_0y_1 - y_1y_2 = -x_0x_1 + x_0^2 - y_0y_2 + y_0^2$$

Factoricemos:

$$\begin{aligned}
(x_0 - x_1)x_2 + (y_0 - y_2)y_1 &= x_0(x_0 - x_1) + y_0(y_0 - y_2) \\
(x_0 - x_1)x_2 - x_0(x_0 - x_1) &= y_0(y_0 - y_2) - (y_0 - y_2)y_1 \\
(x_0 - x_1)(x_2 - x_0) &= (y_0 - y_2)(y_0 - y_1) \\
(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) &= (y_0 - y_2)(y_1 - y_0) \\
(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) &= -(y_2 - y_0)(y_1 - y_0)
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos:

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_2 - y_0)(y_1 - y_0) = 0 \quad (1)$$

Recordemos que $z_1 - z_0 \neq 0$, entonces es posible plantear la siguiente división:

$$\begin{aligned}
\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} &= \frac{(z_2 - z_0)\overline{(z_1 - z_0)}}{(z_1 - z_0)\overline{(z_1 - z_0)}} \\
&= \frac{(z_2 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}{(z_1 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)} \\
&= \frac{((x_2 + iy_2) - (x_0 + iy_0))((x_1 - iy_1) - (x_0 - iy_0))}{|z_0 - z_1|^2} \\
&= \frac{((x_2 - x_0) + i(y_2 - y_0))((x_1 - x_0) - i(y_1 - y_0))}{|z_0 - z_1|^2} \\
&= \frac{((x_2 - x_0)(x_1 - x_0) + (y_2 - y_0)(y_1 - y_0))}{|z_0 - z_1|^2} \\
&\quad + i \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}{|z_0 - z_1|^2}
\end{aligned}$$

por la ecuación (1), la parte real se cancela:

$$\begin{aligned}
&= i \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}{|z_0 - z_1|^2} \\
&= i\lambda.
\end{aligned}$$

Donde, $\lambda = \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}{|z_0 - z_1|^2}$

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = i\lambda$$

de manera que:

$$z_2 - z_0 = i\lambda(z_1 - z_0)$$

Suficiencia

Recíprocamente, ahora supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$z_2 - z_0 = i\lambda(z_1 - z_0)$$

entonces:

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1|^2 &= |z_2 - z_0 + z_0 - z_1|^2 \\ &= |z_2 - z_0 + z_0 - z_1|^2 \\ &= |i\lambda(z_1 - z_0) + z_0 - z_1|^2 \\ &= |i\lambda(z_1 - z_0) - (z_1 - z_0)|^2 \\ &= |(i\lambda - 1)(z_1 - z_0)|^2 \\ &= |1 - i\lambda|^2 |z_1 - z_0|^2 \end{aligned}$$

como $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned} &= (1^2 + \lambda^2) |z_1 - z_0|^2 \\ &= |z_1 - z_0|^2 + \lambda^2 |z_1 - z_0|^2 \end{aligned}$$

sabemos que $|i| = 1$, por lo tanto $1 = |i|^2$

$$\begin{aligned} &= |z_1 - z_0|^2 + |i|^2 \lambda^2 |z_1 - z_0|^2 \\ &= |z_1 - z_0|^2 + |i\lambda|^2 |z_1 - z_0|^2 \\ &= |z_1 - z_0|^2 + |i\lambda(z_1 - z_0)|^2 \\ |z_2 - z_1|^2 &= |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2 \end{aligned}$$

□

La idea geométrica que relaciona los módulos de las diferencias con el Teorema de Pitágoras tiene validez. El factor i significa que los números complejos $z_1 - z_0$ y $z_2 - z_0$ forman un ángulo que mide $\frac{\pi}{2}$; λ , es un factor de escala entre sus módulos.