

Problema 9-4

Theory of Equations

Uspensky

Myriam Rosalía Maldonado Ramírez
Eduardo Virueña Silva

Noviembre, 2025

Problema 1. *Probar que si z_0, z_1, z_2 son tres números complejos distintos, entonces la igualdad:*

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2$$

se cumple si y sólo si, existe un número real λ tal que:

$$z_2 - z_0 = i\lambda(z_1 - z_0)$$

Observación

Notemos que $z_1 - z_0 \neq 0$, porque los tres puntos son distintos.

Demostración.

Necesidad

Supongamos primero que:

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2$$

Expresemos

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = a + ib \tag{1}$$

entonces

$$z_2 - z_0 = (a + bi)(z_1 - z_0)$$

Tenemos por hipótesis:

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1|^2 &= |z_2 - z_0|^2 + |z_1 - z_0|^2 \\ &= |(a + bi)(z_1 - z_0)|^2 + |z_1 - z_0|^2 \\ &= |a + bi|^2 |z_1 - z_0|^2 + |z_1 - z_0|^2 \\ &= (|a + bi|^2 + 1) |z_1 - z_0|^2 \\ &= (a^2 + b^2 + 1) |z_1 - z_0|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1|^2 &= |z_2 - z_0 + z_0 - z_1|^2 \\ &= |(z_2 - z_0) - (z_1 - z_0)|^2 \\ &= |(a + bi)(z_1 - z_0) - (z_1 - z_0)|^2 \\ &= |(a + bi - 1)(z_1 - z_0)|^2 \\ &= |a + bi - 1|^2 |z_1 - z_0|^2 \\ &= ((a - 1)^2 + b^2) |z_1 - z_0|^2 \\ &= (a^2 - 2a + 1 + b^2) |z_1 - z_0|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Igualando (2) y (3)

$$(a^2 - 2a + 1 + b^2) |z_1 - z_0|^2 = (a^2 + b^2 + 1) |z_1 - z_0|^2$$

Como sabemos que $z_1 - z_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} (a^2 - 2a + 1 + b^2) \cancel{|z_1 - z_0|^2} &= (a^2 + b^2 + 1) \cancel{|z_1 - z_0|^2} \\ a^2 - 2a + 1 + b^2 &= a^2 + b^2 + 1 \\ \cancel{a^2} - 2a + 1 + \cancel{b^2} &= \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 1 \\ -2a + 1 &= 1 \\ -2a &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, (1) queda:

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = 0 + bi = ib$$

de donde, existe $\lambda = b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$z_2 - z_0 = i\lambda(z_1 - z_0)$$

Suficiencia

Recíprocamente, ahora supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$z_2 - z_0 = i\lambda(z_1 - z_0)$$

entonces:

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1|^2 &= |z_2 - z_0 + z_0 - z_1|^2 \\ &= |z_2 - z_0 + z_0 - z_1|^2 \\ &= |i\lambda(z_1 - z_0) + z_0 - z_1|^2 \\ &= |i\lambda(z_1 - z_0) - (z_1 - z_0)|^2 \\ &= |(i\lambda - 1)(z_1 - z_0)|^2 \\ &= |1 - i\lambda|^2 |z_1 - z_0|^2 \end{aligned}$$

como $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned} &= (1^2 + \lambda^2) |z_1 - z_0|^2 \\ &= |z_1 - z_0|^2 + \lambda^2 |z_1 - z_0|^2 \end{aligned}$$

sabemos que $|i| = 1$, por lo tanto $1 = |i|^2$

$$\begin{aligned} &= |z_1 - z_0|^2 + |i|^2 \lambda^2 |z_1 - z_0|^2 \\ &= |z_1 - z_0|^2 + |i\lambda|^2 |z_1 - z_0|^2 \\ &= |z_1 - z_0|^2 + |i\lambda(z_1 - z_0)|^2 \\ |z_2 - z_1|^2 &= |z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2 \end{aligned}$$

□

La idea geométrica que relaciona los módulos de las diferencias con el Teorema de Pitágoras tiene validez. El factor i significa que los números complejos $z_1 - z_0$ y $z_2 - z_0$ forman un ángulo que mide $\frac{\pi}{2}$; λ , es un factor de escala entre sus módulos.