

Probar que

$$|x - 2| < \frac{1}{24} \implies \left| \frac{x^3}{x-1} - 7 \right| < \frac{1}{2}$$

Demostración

Primero notemos que:

$$|x - 2| < \frac{1}{24}$$

equivala a:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{24} &< x - 2 < \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} + 1 &< x - 1 < \frac{1}{24} + 1 \\ 0 &< \frac{23}{24} < x - 1 < \frac{25}{24} \\ 0 &< \frac{24}{25} < \frac{1}{x-1} < \frac{24}{23} \end{aligned} \tag{1}$$

también

$$0 < \frac{47}{24} < x < \frac{49}{24} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{47}{24}\right)^2 &< x^2 < \left(\frac{49}{24}\right)^2 \\ \frac{2209}{576} &< x^2 < \frac{2401}{576} \end{aligned} \tag{3}$$

ahora consideremos:

$$\left| \frac{x^3}{x-1} - 7 \right| = \left| \frac{x^3 - 1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - 7 \right|$$

pero recordemos que:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

entonces:

$$\left| \frac{x^3}{x-1} - 7 \right| = \left| \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} - 7 \right|$$

y como $x - 1 \neq 0$

$$\left| \frac{x^3}{x-1} - 7 \right| = \left| x^2 + x - 6 - \frac{1}{x-1} \right|$$

Para probar lo que nos han pedido, basta con probar que la parte derecha de esta igualdad es $\geq \frac{1}{2}$. Apoyándonos en (1), (2) y (3):

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 + \frac{1}{x-1} &\geq \frac{2209}{576} + \frac{47}{24} - 6 + \frac{24}{25} \\ &= \frac{10849}{14400} \geq \frac{7200}{14400} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\left| \frac{x^3}{x-1} - 7 \right| \geq \frac{1}{2}$$

□