

Encontrar la suma:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} \cdots \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Primero hagamos algunas sumas:

para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} = \frac{1 \cdot (1+2)}{(1+1)^2}$$

para $n = 2$:

$$\sum_{k=1}^2 \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4 \cdot 9} = \frac{8}{9} = \frac{2 \cdot 4}{3^2} = \frac{2 \cdot (2+2)}{(2+1)^2}$$

para $n = 3$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} \\ &= \frac{15}{16} = \frac{3 \cdot 5}{4^2} = \frac{3 \cdot (3+2)}{(3+1)^2} \end{aligned}$$

Al parecer:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Vamos a probar esto por el Principio de Inducción Matemática:

Base de inducción.

Ya calculamos que

$$\sum_{k=1}^1 \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} = \frac{1 \cdot (1+2)}{(1+1)^2}$$

Hipótesis de inducción.

Supongamos que, para cierto $r \in \mathbb{N}$, ya se ha probado que:

$$\sum_{k=1}^r \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{r(r+2)}{(r+1)^2}$$

Paso de inducción.

$$\sum_{k=1}^{r+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

separemos el último sumando:

$$= \sum_{k=1}^r \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} + \frac{2(r+1)+1}{(r+1)^2((r+1)+1)^2}$$

por hipótesis de inducción, tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{r(r+2)}{(r+1)^2} + \frac{2r+3}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{r(r+2)^3 + 2r+3}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{r(r^3 + 6r^2 + 12r + 8) + 2r+3}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{r^4 + 6r^3 + 12r^2 + 8r + 2r+3}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{r^4 + 6r^3 + 12r^2 + 10r + 3}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{(r^4 + 3r^3 + 3r^2 + r) + (3r^3 + 9r^2 + 9r + 3)}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{r(r^3 + 3r^2 + 3r + 1) + 3(r^3 + 3r^2 + 3r + 1)}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{(r+3)(r^3 + 3r^2 + 3r + 1)}{(r+1)^2(r+2)^2} \\ &= \frac{(r+3)(r+1)^3}{(r+1)^2(r+2)^2} \end{aligned}$$

como $r+1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} &= \frac{(r+3)(r+1)}{(r+2)^2} \\ \sum_{k=1}^{r+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \frac{(r+1)((r+1)+2)}{((r+1)+1)^2} \end{aligned}$$

□