

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[8]{n^2 + 1} - \sqrt[4]{n + 1}$$

Eduardo Virueña Silva

1 de diciembre de 2025

Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[8]{n^2 + 1} - \sqrt[4]{n + 1}$$

Usaremos el teorema del sándwich. Primero notemos que:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + 1$$

como $f(x) = \sqrt[8]{x}$ es una función creciente:

$$\begin{aligned} \sqrt[8]{(n + 1)^2} &\geq \sqrt[8]{n^2 + 1} \\ \sqrt[4]{n + 1} &\geq \sqrt[8]{n^2 + 1} \\ 0 &\geq \sqrt[8]{n^2 + 1} - \sqrt[4]{n + 1} \end{aligned}$$

Notemos además que:

$$\begin{aligned} n^2 + 1 &\geq n^2 - 2n + 1 \\ \sqrt[8]{n^2 + 1} &\geq \sqrt[8]{n^2 - 2n + 1} \\ \sqrt[8]{n^2 + 1} &\geq \sqrt[8]{(n - 1)^2} \\ \sqrt[8]{n^2 + 1} &\geq \sqrt[4]{n - 1} \end{aligned}$$

entonces, tenemos que:

$$0 \geq \sqrt[8]{n^2 + 1} - \sqrt[4]{n + 1} \geq \sqrt[4]{n - 1} - \sqrt[4]{n + 1}$$

Calculemos entonces el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{n - 1} - \sqrt[4]{n + 1}$$

Estimemos:

$$\sqrt[4]{n - 1} - \sqrt[4]{n + 1}$$

Recordemos que:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Tomemos:

$$a = \sqrt[4]{n-1}$$

$$b = \sqrt[4]{n+1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} &= \\ &= \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \\ &= \frac{(\sqrt[4]{n-1})^4 - (\sqrt[4]{n+1})^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \\ &= \frac{(n-1) - (n+1)}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \\ &= \frac{-2}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 &= (\sqrt[4]{n-1})^3 + (\sqrt[4]{n-1})^2 \sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n-1} (\sqrt[4]{n+1})^2 + (\sqrt[4]{n+1})^3 \\
&= \left(\sqrt[4]{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right)^3 + \left(\sqrt[4]{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right)^2 \sqrt[4]{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&\quad + \sqrt[4]{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \left(\sqrt[4]{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)^2 + \left(\sqrt[4]{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)^3 \\
&= \sqrt[4]{n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&\quad + \sqrt[4]{n \left(1 - \frac{1}{n}\right) n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \\
&= \sqrt[4]{n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&\quad + \sqrt[4]{n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \\
&= n^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} + n^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&\quad + n^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + n^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \\
&= n^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \right)
\end{aligned}$$

Los términos entre paréntesis convierten todos a 1 cuando $n \rightarrow \infty$, pero el factor $n^{\frac{3}{4}} \rightarrow \infty$, de manera que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} = 0$$

Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{n-1} - \sqrt[4]{n+1} = 0.$$

Por último, ahora calculamos el límite que tenemos pendiente. Sabemos que:

$$0 \geq \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} \geq \sqrt[4]{n-1} - \sqrt[4]{n+1}$$

Entonces, como el límite cuando $n \rightarrow \infty$ para las dos expresiones de los extremos de esta desigualdad son ambos 0, tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1} - \sqrt[n]{n + 1} = 0$$