

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$$

Eduardo Virueña Silva

October, 2025

Proposición 1. *Pruebe que si $1 < r$ entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

Demostración. Consideremos un número real $t > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} (1+t)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} t^k \\ &= \binom{n}{0} 1^{n-0} t^0 + \binom{n-1}{1} n 1^{n-1} t^1 + \cdots + \binom{n}{n} 1^{n-n} t^n \\ &= 1 + \frac{n}{1!} t + \frac{n(n-1)}{2!} t^2 + \cdots + t^n \end{aligned}$$

como todos los términos de esta suma son positivos entonces, si nos quedamos con los dos primeros, se cumple la desigualdad:

$$(1+t)^n \geq 1 + nt$$

Consideremos $r > 1$ entonces, $r - 1 > 0$, de donde:

$$\begin{aligned} |r^n| &= r^n \\ &= (1 + (r-1))^n \end{aligned}$$

En la desigualdad anterior usamos $t = r - 1$:

$$\begin{aligned} &\geq 1 + n(r-1) \\ &\geq n(r-1) \end{aligned}$$

Supongamos que damos un número real M tal que $M > 0$, entonces tomemos $M > \frac{M}{r-1}$ y entonces, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > M > \frac{M}{r-1}$, tenemos:

$$\begin{aligned} |r^m| &= r^m \\ &\geq m(r-1) \geq N(r-1) \\ &> \frac{M}{r-1}(r-1) \\ &> M \end{aligned}$$

Lo cual prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

□

Proposición 2. *Pruebe que si $0 < r < 1$ entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

Demostración. Notemos que si $0 < r < 1$ entonces $\frac{1}{r} > 1$. Nuevamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= 1 + \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \\ \left(\frac{1}{r} \right)^n &= \left(1 + \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \right)^n \\ &\geq 1 + n \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \end{aligned}$$

tomando inversos multiplicativos:

$$\begin{aligned} r^n &\leq \frac{1}{1 + n \left(\frac{1}{r} - 1 \right)} \\ &\leq \frac{1}{1 + n \left(\frac{1-r}{r} \right)} \\ &\leq \frac{1}{n \left(\frac{1-r}{r} \right)} \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{r}{1-r} \right) \end{aligned}$$

Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N > \frac{1-r}{r\varepsilon}$, de manera que si $m > N$, se cumple:

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \frac{1-r}{r} \varepsilon$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} |r^m - 0| &= r^m \\ &\leq \frac{1}{N} \\ &< \frac{1-r}{r} \frac{r}{1-r} \varepsilon \\ |r^m - 0| &< \varepsilon \end{aligned}$$

lo cual demuestra que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

□