

Teorema del sándwich o de la compresión

Eduardo Virueña Silva

Octubre, 2025

Proposición 1. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, tres sucesiones de números reales tales que:

Los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existen y son iguales a L .

Para toda $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq c_n \leq b_n$

entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ existe y es igual a L .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado.

Si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, entonces existe $N_a \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$:
 $n > N_a \implies |a_n - L| < \varepsilon$.

De donde, si $n > N_a$:

$$\begin{aligned} |a_n - L| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< a_n - L < \varepsilon \\ L - \varepsilon &< a_n < L + \varepsilon \end{aligned}$$

Si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$, entonces existe $N_b \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$:
 $n > N_b \implies |b_n - L| < \varepsilon$.

De donde, si $n > N_b$:

$$\begin{aligned} |b_n - L| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< b_n - L < \varepsilon \\ L - \varepsilon &< b_n < L + \varepsilon \end{aligned}$$

Ahora, para toda $n \in \mathbb{N}$, si $n > \max\{N_a, N_b\}$ se cumplen las dos desigualdades:

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< a_n < L + \varepsilon \\ L - \varepsilon &< b_n < L + \varepsilon \end{aligned}$$

si tomamos la primera parte de la primera y la segunda parte de la segunda, tenemos que si $n > \max\{N_a, N_b\}$:

$$L - \varepsilon < a_n, \quad b_n < L + \varepsilon$$

y como $a_n \leq c_n \leq b_n$:

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$$

$$|c_n - L| < \varepsilon$$

entonces, existe $N = \max\{N_a, N_b\}$, tal que si $n > N$, se cumple: $|c_n - L| < \varepsilon$, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

□