

**Problema 1-6** Fije  $y \in \mathbb{R}^+$ .

1. El número  $x \in \mathbb{R}^+$  satisface la condición  $|x - y| < \frac{y}{2}$ , demuestre que:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{2}{3} \frac{|x - y|}{\sqrt{y}} \quad (1)$$

2. Fije  $\varepsilon > 0$ , deduzca del inciso (1) que si  $x \in \mathbb{R}^+$  satiface la condición  $|x - y| < \min \left\{ \frac{3}{2} \sqrt{y} \varepsilon, \frac{y}{2} \right\}$ , entonces  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ .

Antes de hacer las demostraciones debemos establecer tres afirmaciones::

- (I.) La función  $f(x) = x^2$  es creciente en  $\mathbb{R}^+$ :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a^2 < b^2 \implies a < b. \quad (2)$$

Supongamos que  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , entonces

$$\begin{aligned} a^2 &< b^2 \\ 0 &< b^2 - a^2 \\ &= (b + a)(b - a) \end{aligned}$$

como este producto es positivo y como  $b + a$  es positivo, entonces  $b - a$  debe ser positivo.

$$\begin{aligned} 0 &< b - a \\ a &< b \end{aligned}$$

- (II.) Por supuesto, de la afirmación anterior, puede deducirse inmediatamente que la función raíz cuadrada es también creciente en  $\mathbb{R}^+$ :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \implies \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

- (III.) El inverso multiplicativo invierte la desigualdad:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : 0 < a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

En efecto, como  $a > 0$  y  $b > 0$  entonces  $ab > 0$  y  $\frac{1}{ab} > 0$ . Entonces:

$$0 < a < b$$

multiplicando por  $\frac{1}{ab} > 0$

$$\begin{aligned} 0 &< a \frac{1}{ab} < b \frac{1}{ab} \\ 0 &< \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \end{aligned}$$

(IV.)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 > \frac{3}{2}$$

En efecto, consideremos:

$$4 > 2$$
$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

por una afirmación previa:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 > \frac{3}{2}$$

(V.)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : |a| < b \implies -b < a < b$$

Tenemos que considerar dos casos:

Si  $a \geq 0$ , entonces  $|a| = a$  y como  $|a| < b$ , entonces  $-b < 0 < a < b$ ,

Si  $a < 0$ , entonces  $|a| = -a$  y como  $|a| < b$  entonces  $-a < b$ . que equivale a  $-b < a$ , como  $a < 0 < b$  entonces  $-b < a < b$ .

En cualquiera de los dos casos  $-b < a < b$ .

(VI.) La desigualdad (débil) del triángulo. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , en la desigualdad del triángulo

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

tomemos  $x = a - b$ ,  $y = b$ , entonces:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$|(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$
$$|a| \leq |a - b| + |b|$$

de donde:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

de donde:

### **Demostración**

1. Sea  $y$  un número real positivo y supongamos que  $|x - y| \leq \frac{y}{2}$ , entonces, por la desigualdad débil:

$$\begin{aligned} |x - y| &< \frac{y}{2} \\ -\frac{y}{2} &< x - y < \frac{y}{2} \end{aligned}$$

sumando  $y$

$$\frac{y}{2} < x < y + \frac{y}{2} = \frac{3}{2}y$$

tomando raíz cuadrada de los dos primeros términos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}y} &< \sqrt{x} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &> \sqrt{\frac{1}{2}y} + \sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &> \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1\right) \sqrt{y} \end{aligned}$$

pero probamos que  $\sqrt{\frac{1}{2}} + 1 > \frac{3}{2}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > \frac{3}{2}\sqrt{y}$$

tomando inversos multiplicativos:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{y}}$$

pero:

$$\begin{aligned}|x - y| &= |(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})| \\ &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| |\sqrt{x} + \sqrt{y}| \\ &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| (\sqrt{x} + \sqrt{y})\end{aligned}$$

ahora  $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ , por lo que podemos dividir

$$\begin{aligned}|\sqrt{x} - \sqrt{y}| &= \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} |x - y|\end{aligned}$$

pero probamos que esto es menor que  $\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{y}}$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{y}} |x - y| \\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &= \frac{2}{3} \frac{|x - y|}{\sqrt{y}}\end{aligned}$$

que demuestra el primer inciso

2. Fijemos ahora  $\varepsilon > 0$ , dado  $x \in \mathbb{R}^+$  que satiface la condición  $|x - y| < \min\{\frac{3}{2}\sqrt{y}\varepsilon, \frac{y}{2}\}$ , entonces  $|x - y| < \frac{y}{2}$ , por lo que se satiface la condición del inciso anterior, entonces:

$$\begin{aligned}|\sqrt{x} - \sqrt{y}| &= \frac{2}{3} \frac{|x - y|}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{|x - y|}{\sqrt{y}}\end{aligned}$$

pero como también  $|x - y| < \frac{3}{2}\sqrt{y}\varepsilon$

$$\begin{aligned}|\sqrt{x} - \sqrt{y}| &< \frac{2}{3\sqrt{y}} \frac{3}{2}\sqrt{y}\varepsilon \\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &< \varepsilon\end{aligned}$$

como quería demostrarse.