

$y \in \mathbb{R}^+$ probar que $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$(1) \quad |x-y| < \frac{y}{2} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{2}{3} \frac{|x-y|}{\sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} |x-y| &= |(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})| \\ &= |\sqrt{x} + \sqrt{y}| |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$|x-y| < \frac{y}{2} \Rightarrow -\frac{y}{2} < x-y < \frac{y}{2} \quad // |a| < b \Rightarrow -b < a < b$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{y}{2} < x < \frac{3}{2}y \quad // \text{ al sumar } y$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{\frac{y}{2}} < \sqrt{x} \quad // \text{ tomando raíz cuadrada}$$

$$\sqrt{x} > \sqrt{\frac{y}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}y} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{y}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{y} + \sqrt{y} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + 1\right)\sqrt{y}$$

$$\begin{aligned} 4 > 2 &\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\sqrt{y} > \frac{3}{2}\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{y}}$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} |x-y| < \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{y}} |x-y|$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{2}{3\sqrt{y}} |x-y|$$

② Fije $\varepsilon > 0$, usando el resultado anterior deduzca que si $x \in \mathbb{R}^+$ cumple $x < \min \left\{ \frac{y}{2}, \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{y}} \right\}$ entonces $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$.

Prueba si $x \in \mathbb{R}^+$ cumple $x < \min \left\{ \frac{y}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{y}\varepsilon \right\}$ entonces, en particular $|x-y| < \frac{y}{2}$, por lo tanto se cumple, por el inciso anterior, que:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\sqrt{y}} |x-y|$$

pero, si además $|x-y| < \frac{3}{2}\sqrt{y}\varepsilon$ entonces de la desigualdad anterior:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{2}{3\sqrt{y}} \frac{3}{2}\sqrt{y}\varepsilon = \varepsilon.$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon.$$